ÉNONCÉ

⚠ CONVENTION FOURIER :

- $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} \, dt$. $F : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \\ f \longrightarrow \hat{f} \end{cases}$. $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$.

<u>TH</u> : . M ss ev fermé de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par translation
$\Leftrightarrow$ M de la forme $M_E := \{ f \in L^2(\mathbb{R}),\ F(f)_{|E} = 0 \}$
où $E \subset \mathbb{R}$ mesurable.

LEÇONS.

- 201
- 213
- 234
- 250

RÉFS.

[DLi] Daniel Li . Cours d'analyse fonctionnelle p. 118
([Rudin] élems d'analyse réelle p. 227)

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. Th. de la projection sur un convexe fermé.

DÉMO

$*$: oral
$**$: pour comprendre

Lien entre TF et translat :

<u>LEM</u> : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\tau_a f) = e_a \times \mathcal{F}(f)$ avec $e_a : t \mapsto e^{ita}$, $a \in \mathbb{R}$

(sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: c'est un CV. on étend à $L^2(\mathbb{R})$ par densité).

Donc pour $M \subset L^2(\mathbb{R})$: M stable par τ_a $\forall a \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(M)$ stable par $\times e_a$ $\forall a$.

$\Rightarrow$ Soit M inv. par translation, fermé dans $L^2(\mathbb{R})$

<u>IDÉE</u> : construire φ à val dans $\{0,1\}$ tq $\forall f \in M$, $\mathcal{F}(f)(\varphi - 1) = 0$.

φ joue le rôle d'1 indicatrice d'1 certain ens qu'il suffira de poser.

l'égalité donnera bien $\mathcal{F}(f) = 0$ qd $\varphi = 0$

on va faire intervenir la proj $\perp$:

. $\mathcal{F}(M) = \left(\underset{\sim}{\mathcal{F}^{-1}}\right)^{-1}(M)$ fermé $\hat{c}$ im réc fermé par appli conti

continue : dans $L^2 \to$ autom

La projection orthogonale P sur $\mathcal{F}(M)$ est bien définie.

($\exists$ par thm proj $\perp$ sur un ss ev fermé : appli ds le Hilbert $L^2(\mathbb{R})$)

<u>PLAN</u> : ① Mq $P(f)g = P(g)f$ pp. $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$

② Construct φ tq $\mathcal{F}(f)(1-\varphi) = 0$ $\forall f \in M$

③ construct E tq $\varphi = \mathbb{1}_{E^c}$

④ mq $M = M_E := \{ f \in L^2(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}(f)_{|E} = 0 \}$

① On a $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, $\overline{e_a P(g)} \in \mathcal{F}(M)$, $f - P(f) \in \mathcal{F}(M)^\perp$

stable par e_a

TF au sens L^1.

$$0 = \langle P(f) - f, \overline{e_a P(g)} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(P(f) - f)\, P(g)}_{\in L^1(\mathbb{R}) \text{ via l'ics}} e_{-a}\, d\lambda = \widehat{(P(f) - f)\, P(g)}\,(a)$$

(produit de fonct $L^2 \times L^2$).

En particulier, il y a injectivité

Par injectivité de $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f}$, $(P(f) - f)\, P(g) = 0$ pp.

Donc $P(f)P(g) = f\,P(g)$ pp

En échangeant les rôles de f et g, on obt $f\,P(g) = P(f)\,g$ pp $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$

F est bijective.

(2) Rq : $f \in \Pi \Leftrightarrow F(f) \in F(\Pi) \Leftrightarrow P(F(f)) = F(f)$ $(*)$

Donc $\forall f \in \Pi, g \in L^2(\mathbb{R})$ $\qquad F(f)\, g = P(g)\, F(f)$

On voudrait avec $(*)$ poser $\varphi = \frac{P(g)}{g}$, mais il faut choisir g qui ne s'annule pas.

On choisit $g : t \mapsto e^{-|t|} \in L^2(\mathbb{R})$ (veut fonction positive dans $L^2(\mathbb{R})$: c'est la + naturelle)

Et on pose $\varphi : t \mapsto \frac{P(g)(t)}{g(t)}$ pour λ-pp $t \in \mathbb{R}$. ie $g\varphi = P(g)$ $(*)$

On obtient $P(g) = \varphi \times g$.

Et $\forall f \in \Pi$, $F(f) = \varphi F(f)$ car $g \in L^2(\mathbb{R})$ et ne s'annule pas.

mq $\varphi^2 = \varphi$

(3) Mq pp t, $\varphi(t) \in \{0,1\}$

P projecteur

$\varphi^2 \times g = \varphi \times P(g) = P \circ P(g) \overset{\downarrow}{=} P(g) = \varphi \times g$

Donc $\varphi^2 = \varphi$ en simplifiant par g qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Donc pp $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 1$ ou $\varphi(t) = 0$

on peut alors choisir E tq $\varphi = \mathbb{1}_{E^c}$

Notons $E = \{t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = 0\}$. On a alors $\varphi = \mathbb{1}_{E^c}$

et E mesurable car φ l'est

(4) par équiv.

$f \in M \Leftrightarrow P(F(f)) = \varphi F(f) = \mathbb{1}_{E^c} F(f) = F(f)$ c rappelé $(*)$

$\Leftrightarrow F(f)_{|E} = 0$

$\Leftrightarrow f \in \Pi_E$.

$\Leftarrow$ Soit $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$M_E := \{ f \in L^2(\mathbb{R}),\ F(f)_{|E} = 0 \}$

mq fermé de $L^2(\mathbb{R})$, stable par translat

- stable par mult par $\tau_a\ \forall a$ car $(=0)$ stable par $x e_a$ et τ_a se transfo en $x e_a$ en passant de F.

Mq $M_E = \bigcap_{\substack{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \\ \psi_{|E^c} = 0}} \ker(\langle F(\cdot), \psi \rangle) := K$ (si en fermé).

intersect. de fermés, fermés ĉ im réci par l'appli conti (F, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ conti)

$\subset$ Soit $\varphi \in M_E$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tq $\psi_{E^c} = 0$.

$\langle F(\varphi), \psi \rangle = \int_E \underbrace{F(\varphi)(x)}_{=0} \overline{\psi(x)}\, dx + \int_{E^c} F(\varphi)(x) \underbrace{\overline{\psi(x)}}_{=0}\, dx = 0$ car $\varphi \in M_E$

$\supset$ Soit $\varphi \in K$ $\quad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$ tq $\psi_{|E^c} = 0$, $\langle F(\varphi), \psi \rangle = 0$.

vrai $\forall$: choix adapté

En particulier, $F(\varphi) \mathbb{1}_E \in L^2(E) \subset L^2(\mathbb{R})$

$0 = \langle F(\varphi) \mathbb{1}_E, F(\varphi) \mathbb{1}_E \rangle = \| F(\varphi) \mathbb{1}_E \|^2_{L^2(E)}$ restrict ps à $L^2(E)$

Donc $F(\varphi) \mathbb{1}_E = 0$ (ps non dégé)

Donc $\varphi \in M_E$.